13. jan. 2006

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

5.2 Underrom

Def En delmengde W til et vektorrom V er et underrom hvis og bare hvis W er et vektorrom under addisjon og skalarmultiplikasjon definert i V.

Gitt $W \subset V$, V er et vektorrom, for å verifisere at W er et underrom må man verifisere (sjekke) alle aksiomene 1-10 i def. av vektorrom (å nei....)

Teorem 5.2.1 gir en lettere måte å gjøre dette på (puh!)

Teorem 5.2.1 (Karakterisering av underrom)

$W \subset V$, V vektorrom, $W \neq \emptyset$ (dvs. W er en ikke-tom mengde)

da er W et underrom av V hvis og bare hvis

$\Updownarrow$

(a) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

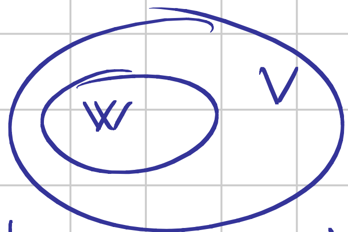
(b) k skalar, $u \in W \Rightarrow k \cdot u \in W$

Bevis

($\Downarrow$) Hvis W er et underrom av V da er aksiom 1-10 oppfylt, merk at (1) = (a) og (6) = (b), som da også er oppfylt.

(⇑) Anta at (a) og (b) er oppfylt. Da er aksiom (1) og (6) i def. av vektorrom for W oppfylt.

Merk at (2), (3), (7), (8), (9), (10) er oppfylt for W som konsekvens av at de gjelder i V.



(4): Fra (b): $k=0$, $0\cdot u \in W$ for $u \in W$, men

$$\underbrace{0\cdot u}_{\in V} = 0 \quad \text{(teorem 5.11)}$$

da er $0 \in W$, så $0+v = v+0 = v \quad \forall v \in W$

(5): Negativ element, velg $k=-1$ i (b): $(-1)\cdot u \in W$, $u \in W$,

$(-1)\cdot u = -u$ (teorem) og da er $-u \in W$, s.a.

$$u+(-u) = (-u)+u = 0.$$

Fine $\square$ q.e.d.

<u>Merknad</u>: Hvis (a) gjelder sier vi at W er lukket under "+"
Hvis (b) ——— " ——— "·"

<u>Eksempel</u>: Symmetriske 2×2 matriser : S_{22}

$$S_{22} \subset M_{22} \qquad u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix}$$

(a) $u, v \in S_{22}$: $u+v = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{12}+v_{12} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} \in S_{22}$

(b) k, reelt tall, $u \in S_{22}$: $k\cdot u = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{12} & ku_{22} \end{bmatrix} \in S_{22}$

S_{22} er et underrom av M_{22}

Dette gjelder også for $n \times n$ symmetriske matriser:

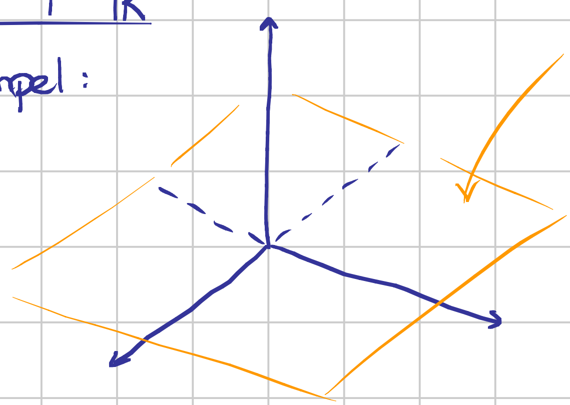
S_{nn} er et underrom av M_{nn}.

$T_{nn} = \{$ triangulære $n \times n$ matriser $\}$ $\quad T_{nn} \subset M_{nn}$ er et underrom

$\{$ diagonale $n \times n$ matriser $\} \subset M_{nn}$ er et underrom

Underrom i $\mathbb{R}^3$

Eksempel:



xy-planet

$= \{$ alle $u \in \mathbb{R}^3$ s.a. $u = (u_1, u_2, 0)\}$

er (a) og (b) oppfylt?

(a) $u, v \in$ xy-planet ; $u + v = (u_1, u_2, 0) + (v_1, v_2, 0)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0) \in$ xy-planet

(b) $u \in$ xy-planet , k skalar

$k \cdot u = (ku_1, ku_2, 0) \in$ xyplanet

$\Rightarrow$ xy-planet er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

Generelt: alle plan og linjer som går gjennom origo i $\mathbb{R}^3$ er underrom av $\mathbb{R}^3$.

Eksempel: $P_n = \{$ funksjoner $p(x)$ s.a. $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n\}$

polynomer av grad n ; $a_0, \dots, a_n$ er reelle tall.

P_n er et underrom av mengden av funksjoner på $(-\infty, +\infty)$.

(a) $p+q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n$

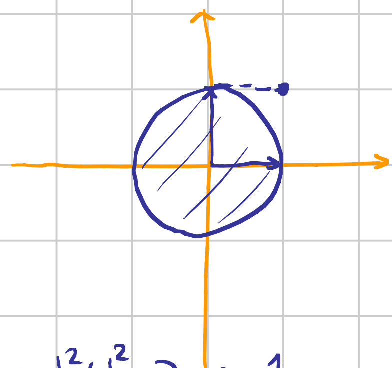
er et polynom av grad n.

(b) $k \cdot p = ka_0 + ka_1x + \dots + ka_nx^n \in \mathbb{P}_n$

$\square$

<u>Eksempel</u>: En disk i $\mathbb{R}^2$ er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$

$$C = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$$



Vi forsøker å vise at for alle

$u, v \in C$, så er $u+v \in C$

Velger $u = (1,0)$ $v = (0,1)$

$u+v = (1,1)$ og $(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 = 1^2+1^2 = 2 > 1$

$\square$

* Alle vektorrom V s.a. $V \neq \{0\}$ har minst 2 underrom:

V selv og $\{0\}$ - nullunderrommet.

Oversikt over $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Underrom i $\mathbb{R}^2$	Underrom i $\mathbb{R}^3$
$\{0\}$	$\{0\}$
linjer gjennom origo	linjer gjennom origo
$\mathbb{R}^2$	plan —"—
	$\mathbb{R}^3$

Underrom forbundet til lineære systemer : $Ax = 0$

Teorem 5.2.2

La $Ax = 0$ være et homogent lineært system med m ligninger og n ukjente, da er mengden av løsninger av systemet et underrom av $\mathbb{R}^n$. ◻

Bevis

(a) La x og x' være løsninger ; da er

$$Ax = 0 \quad \text{og} \quad Ax' = 0.$$

Betrakt $x + x'$: $A(x+x') = Ax + Ax'$
$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ $x + x'$ er en løsning.

(b) Betrakt kx $\quad A(kx) = kAx = k \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ kx er en løsning

(a) og (b) i Teorem 5.2.1 er oppfylt ◻

LINEÆRE KOMBINASJONER

Def w kalles en lineær kombinasjon av $v_1, v_2, \ldots, v_r$ hvis og bare hvis $w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$ der $k_1, k_2, \ldots, k_r$ er skalare.

Eks Alle $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ er lineære kombinasjoner av $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$ siden

$$v = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Eks. oppg. 7a 5.2

$u = (0, -2, 2)$ $v = (1, 3, -1)$

Er $(2,2,2)$ en linearkombinasjon av u og v?

$$(2,2,2) = \lambda \cdot (0,-2,2) + \mu(1,3,-1)$$
$$= (\mu, -2\lambda + 3\mu, 2\lambda - \mu) \Rightarrow$$

Ligningssystem:
$$\left.\begin{array}{l} \mu = 2 \\ -2\lambda + 3\mu = 2 \\ 2\lambda - \mu = 2 \end{array}\right\}$$
$\mu = \lambda = 2$ er en løsning

så $(2,2,2) = 2u + 2v$.

Ja!

Gitt $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$. generelt kan noen $w \in V$ skrives $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$ mens andre elementer $u \in V$ ikke er en linearkombinasjon av $v_1, \ldots, v_r$

Teorem 5.2.3

Hvis $v_1, v_2, \ldots, v_r$ er vektorer i V, da er

(i) $W = \{$alle linear kombinasjoner av $v_1, \ldots, v_r\}$ et underrom av V.

(ii) W det minste underrom av V s.a. $v_1, \ldots, v_r \in W$, mao. for alle underrom U av V s.a. $v_1, \ldots, v_r \in U$ er $W \subseteq U$.

Bevis (i) Vi må bevise at W oppfyller (a) og (b) i Teorem 5.2.1, gitt $w, u \in W$.

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$$

$$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$$

en linear kombinasj. av $v_1, \dots, v_r$

og da er

$$u + w = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r) v_r \in W$$

så W oppfyller (a). [lukket under addisjon]

$$kw = k(\lambda_1 v_1) + \dots + k(\lambda_r v_r) = (k\lambda_1) v_1 + \dots + (k\lambda_r) v_r \in W$$

så W oppfyller (b) [lukket under skalarmultiplikasjon]

(i) er da bevist.

For å bevise (ii) ser vi først at $v_1, \dots, v_r \in W$ siden

$$\forall i = 1 \dots r \qquad v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_r .$$

Gitt $U \subset V$ s.a. $v_1, \dots, v_r \in U$ da gir Teorem 5.2.1 (a) og (b) at alle lineære kombinasjoner av $v_1, \dots, v_r$ er i U og da må $W \subset U$. Dermed holder (ii).

$\square$

Gitt $v_1, \dots, v_r$ i V; $W = \{$ alle lineære kombinasjoner av $v_1, \dots, v_r \}$ er da underrommet generert av $v_1, \dots, v_r$. Vi sier $v_1, \dots, v_r$ genererer W.

$$W = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\} \qquad , \qquad S \overset{\text{def.}}{:=} \{v_1, \dots, v_r\}$$

$$W = \text{span}(S)$$

W er utspent av $v_1, \dots, v_r$.

Eksempel

Polynomer $1, x, x^2, \dots, x^n$ genererer $\mathbb{P}_n = \{\text{polynomer av grad} \le n\}$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, alle $p(x)$ er linearkombinasjoner av $1, x, \dots, x^n$. $\quad \mathbb{P}_n = \mathrm{span}\{1, x, \dots, x^n\}$

Δ

Teorem 5.2.4

Gitt $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ og $w_1, \dots, w_k \in V$.

Da er $\underbrace{\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_r\}}_{S} = \underbrace{\mathrm{span}\{w_1, \dots, w_k\}}_{S'} = U$

$\Updownarrow$

Hver vektor i S er en linearkombinasjon av de i S' og
— " — S' — " — S.